www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

Concours National d'admission 1989 ESCAE

MATHÉMATIQUES I
Algèbre et analyse
OPTION GÉNÉRALE PRIME

DURÉE : 4 heures

Avec ce sujet sera distribuée une feuille de papier millimétré.

Attention. — Il ne sera pas fourni de feuille supplémentaire.

L'utilisation de papiers différents apportés par le candidat sera assimilée à une tentative de fraude.

Il est rappelé aux candidats qu'une pénalisation d'un maximum de 2 points (sur 20) sanctionnera le manque de soin apporté à la présentation des copies (fautes d'orthographe, copie peu lisible, ...).

L'épreuve est constituée d'un exercice noté sur 6 points et d'un problème noté sur 14 points.

EXERCICE (*sur 6 points*)

Soient f et id les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ de matrices respectives M et I dans la base canonique.

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I. 1°) *a*) Calculer M^{-1} par la méthode du pivot de Gauss.

b) Calculer M^2 et M^3.

c) En déduire que $M^4 = I$.

2°) Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer la matrice M^n en fonction de I, M, M^2, M^3.

3°) Montrer que $M - I$ est régulière. En déduire la relation $M^3 + M^2 + M + I = 0$.

II. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $E_\lambda = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3, f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}\}$

1°) *a*) Montrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

b) Montrer que si $E_\lambda \neq \{\vec{0}\}$ alors $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$.

2°) Déterminer les sous-espaces vectoriels E_λ non réduits au vecteur nul. Préciser leur dimension. En donner une base.

III. Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} + u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$$

1°) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

2°) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de E et $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = MX_n$

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = M^n X_0$

c) Déterminer u_n en fonction de n, u_0, u_1 et u_2.

3°) Démontrer qu'il existe trois éléments $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, M^n = \alpha_n M^2 + \beta_n M + \gamma_n I$$

Tournez la page S.V.P.

PROBLÈME (*14 points*)

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 10$ cm.

Pour tout entier naturel n strictement positif, soit f_n la fonction définie par : $f_n(x) = x^n e^{n(1-x)}$

C_n désigne la représentation graphique de f_n dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I. 1°) *Démontrer que :* $\forall x \in \mathbb{R}, x e^{-x+1} - 1 \leqslant 0$

2°) En déduire la position relative des courbes C_n et C_{n+1}.

3°) Déterminer les points communs à toutes les courbes C_n.

II. 1°) Étudier le sens de variation de f_n. On distinguera les cas $n = 1$, et pour $n > 1$, n pair et n impair.

2°) Déterminer la nature des branches infinies de C_n.

3°) Déterminer les points de C_n d'abscisse non nulle en lesquels la tangente passe par l'origine O des axes.

III. 1°) Étudier la concavité et déterminer le nombre de points d'inflexion de C_n.

2°) Pour $n > 1$, soit $P_n(x_n, u_n)$ et $Q_n(y_n, v_n)$ les points d'inflexion de C_n d'abscisses strictement positives $(x_n < y_n)$.

a) Calculer $w_n = \ell n \dfrac{u_n}{v_n}$

b) Déterminer le développement limité à l'ordre trois au voisinage de zéro de la fonction $f : x \mapsto \ell n \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

c) Déterminer la limite de w_n, puis de $\dfrac{u_n}{v_n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

IV. 1°) Construire C_1, C_2, C_3.

2°) Soit $D = \{M(x, y), 0 \leqslant x \leqslant 1, f_3(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)\}$.
Déterminer en cm^2 l'aire du domaine D.
En donner une valeur approchée à 10^{-2} près au plus proche.

V. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit : $F_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f_n(t)\,dt$ $\qquad I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$

1°) *a*) Justifier l'existence de $F_n(x)$ pour tout réel x.
Montrer que F_n est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$. Calculer $F_1(x)$.

b) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, F_n(x) \leqslant F_1(x)$$

c) Démontrer que $F_n(x) = \dfrac{e^n}{n^{n+1}} \displaystyle\int_0^{nx} t^n e^{-t}\,dt$

2°) *a*) Montrer que l'intégrale I_1 est convergente.

b) En déduire que les intégrales I_n et J_n sont convergentes.

3°) *a*) Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, J_{n+1} = (n+1) J_n$$

b) En déduire la valeur de J_n puis la valeur de I_n.

4°) *a*) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

b) Donner une valeur approchée de I_{10}, I_{20}, I_{100}, I_{650}.
En déduire un encadrement d'amplitude 10^{-1} de la limite de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail